CÁLCULO DE VOLUMES USANDO O GEOGEBRA

Prof. Armando Antonio Monteiro de castro

Versão: Geogebra Classic 5.0.557.0-d 27 August 2021

1. Objetivos:

- ✓ Usar o aplicativo de matemática dinâmica Geogebra para renderizar a superfície de sólidos de revolução, gerados pela rotação de uma função ou de uma superfície em torno dos eixos coordenados ou de uma reta.
- ✓ Apreender a sintaxe do Geogebra para a execução dos comandos necessários.
- ✓ Valorizar o uso do aplicativo para o entendimento e validação do exercício feito manualmente.
- ✓ Assimilar o conceito de sólido gerado pela rotação de uma superfície em torno dos eixos coordenados ou de uma reta, possibilitando o cálculo de comprimento de um arco, da superfície lateral do sólido gerado, bem como o cálculo do volume desse sólido de revolução – aplicações fundamentais do Cálculo Integral.
- ✓ Resolver o problema tipo: determinar o volume do sólido de revolução gerado pela rotação da superfície compreendida pelas curvas $y_1 = \sqrt{25 - x^2}$ e $y_2 = 3$ ao girar em torno do eixo *x*.

O problema: calcular o volume da superfície de revolução gerada pela rotação da região ***R***, compreendida pelas curvas $y_1 = \sqrt{25 - x^2}$ e $y_2 = 3$, ao rotacionar em torno do eixo *x*.

I) Solução manual:

1. Esboçar os gráficos das curvas no mesmo plano cartesiano para a visualização da região ***R***.

2. Encontrar os pontos de intersecção entre as curvas y_1 e y_2, igualando-as e, em seguida, determinar as raízes da equação obtida, obtendo os valores dos extremos de integração.

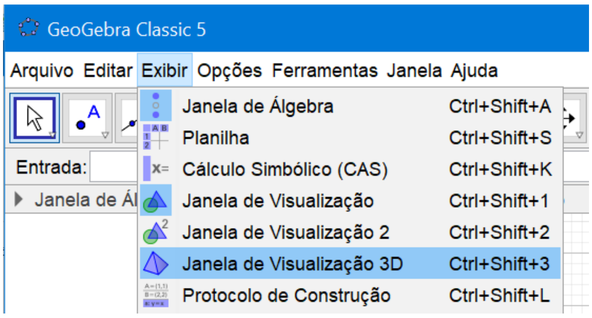
3. Entrar com as funções y_1 e y_2 e com as abscissas dos pontos de intersecção, que determinam os extremos de integração, na fórmula do volume $\int_a^b [(f(x))^2 - (g(x))^2] \cdot dx$.

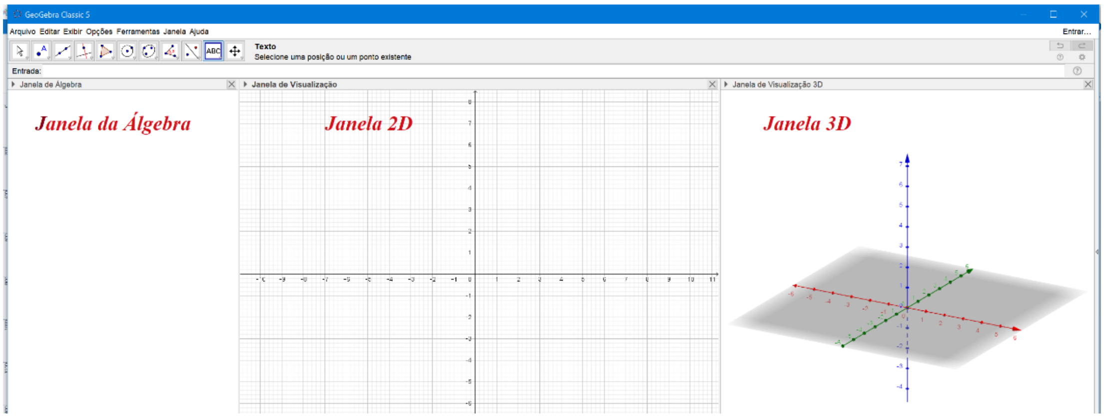
4. Calcular a integral resultante, encontrando o volume do sólido de revolução determinado pela rotação da região ***R***. Tudo correto, o volume encontrado deverá ser:

$V = \frac{256\pi}{3}\ u^3$ ou $V = 268{,}08\ u^3$.

II) Solução usando o app Geogebra:

1. Abrir o Geogebra e, na barra de menus, clicar em “Exibir”, escolhendo o ícone “*Janela de Visualização 3D*”. Note que três janelas estarão a sua disposição: a janela da álgebra, mostrando as sentenças matemáticas digitadas no campo “Entrada”; a janela 2D, mostrando os gráficos no plano cartesiano; e a janela 3D, mostrando os gráficos no espaço tridimensional, ou seja, nos eixos *x* , *y* e *z*.

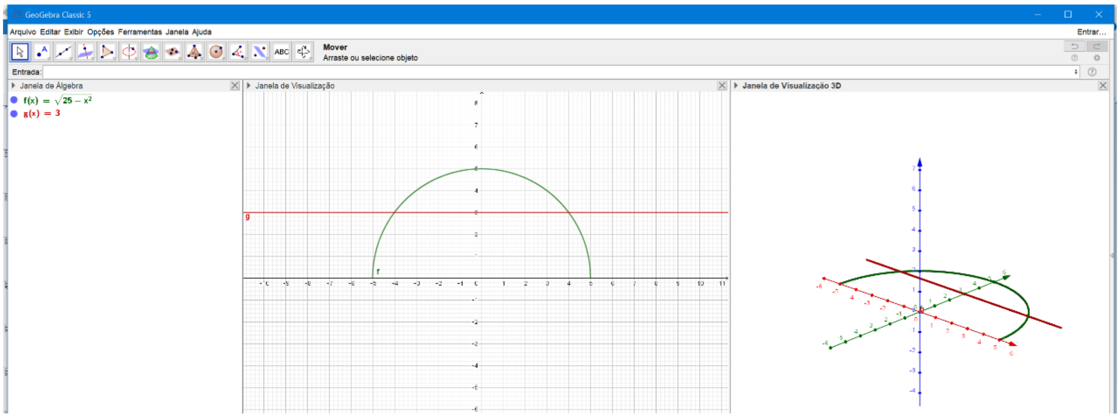




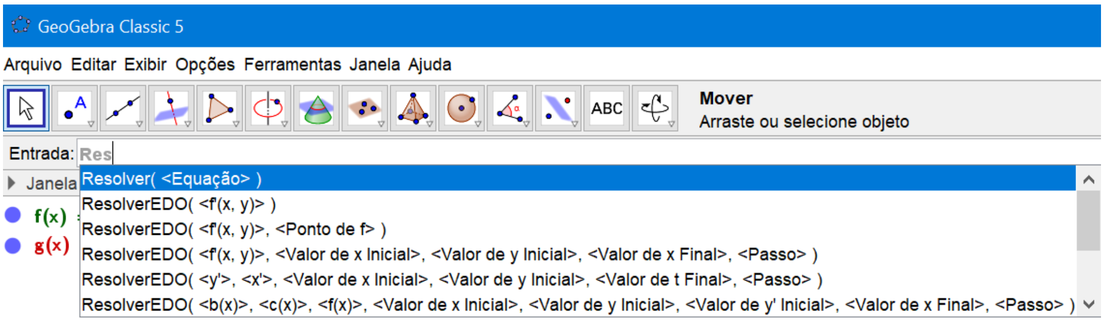
2. No campo “*Entrada*”, digitar: $\boldsymbol{f(x) = sqrt(25 - x^2)}$, pressionando em seguida a tecla <Enter>.

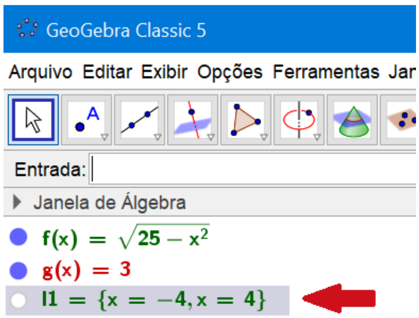
3. Novamente no campo “Entrada”, digitar: $\boldsymbol{g(x) = 3}$, pressionando em seguida a tecla <Enter>.

4. Note que os gráficos das funções $\boldsymbol{f(x)}$ e $\boldsymbol{g(x)}$ foram criados nas janelas 2D e 3D, mostrando a região $\boldsymbol{R}$ que será rotacionada.



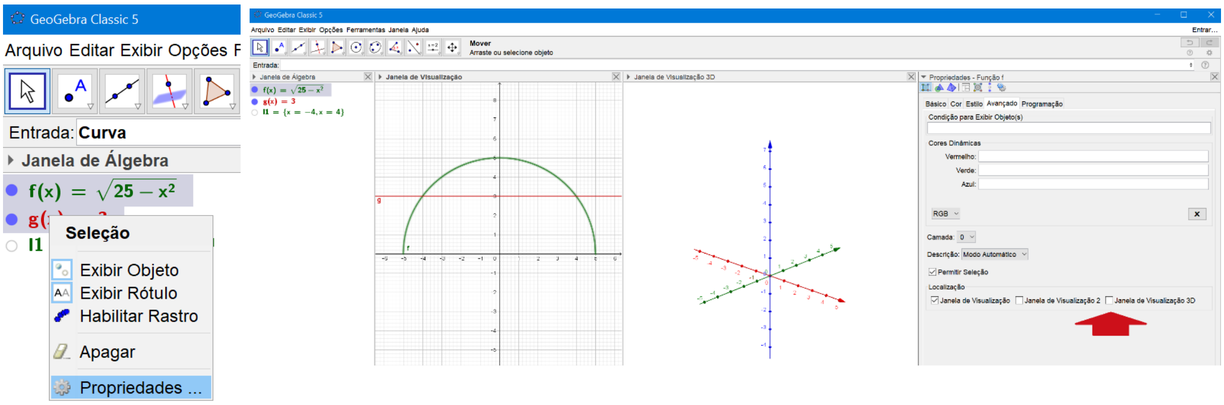
5. Para determinar as intersecções entre as funções, usamos o comando “*Resolver*”, digitando no campo “*Entrada*”: "$\boldsymbol{Resolver(f = g)}$". Note que o Geogebra ofereceu a resposta na janela da álgebra, indicando que $\boldsymbol{x = -4}$, $\boldsymbol{x = 4}$, que serão os nossos extremos de integração.





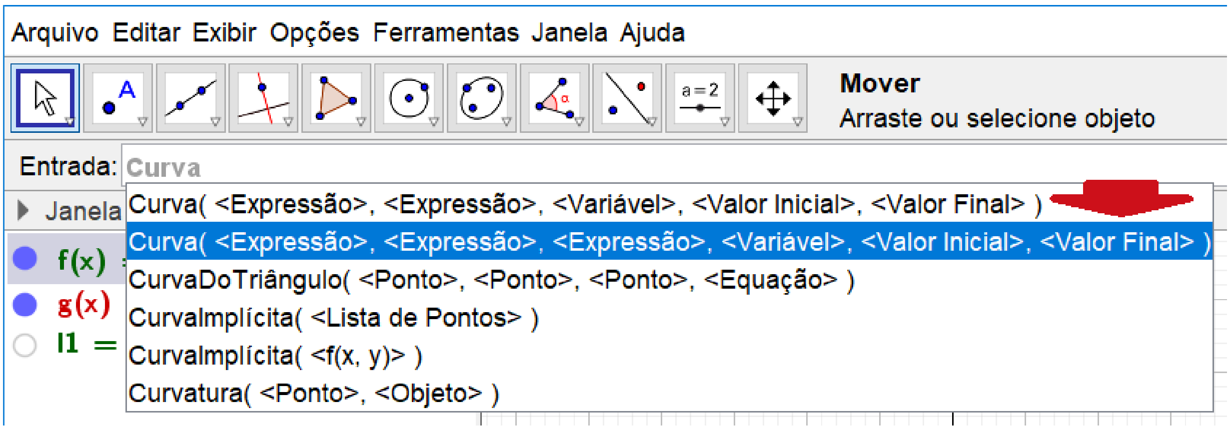
6. Para ressaltar somente a região $\boldsymbol{R}$ nos gráficos 2D e 3D, fazemos o seguinte: pressionando a tecla <Control>, clicamos com o botão direito do mouse sobre as funções f e g que aparecem na janela da álgebra, escolhendo no menu “*propriedades*”. Na nova caixa de diálogo que aparece à direita na tela, escolher a aba “*Avançado*” e, nela, desabilitar “*Janela de Visualização 3D*”, de modo a não exibir na janela 3D os gráficos das duas funções. Calma! Respira, respira...

Com esse comando, faremos aparecer na janela 3D somente o que nos interessa, que é a região ***R***. Caso assim não procedêssemos, o gráfico ficaria poluído, impedindo a perfeita visualização da região em questão.

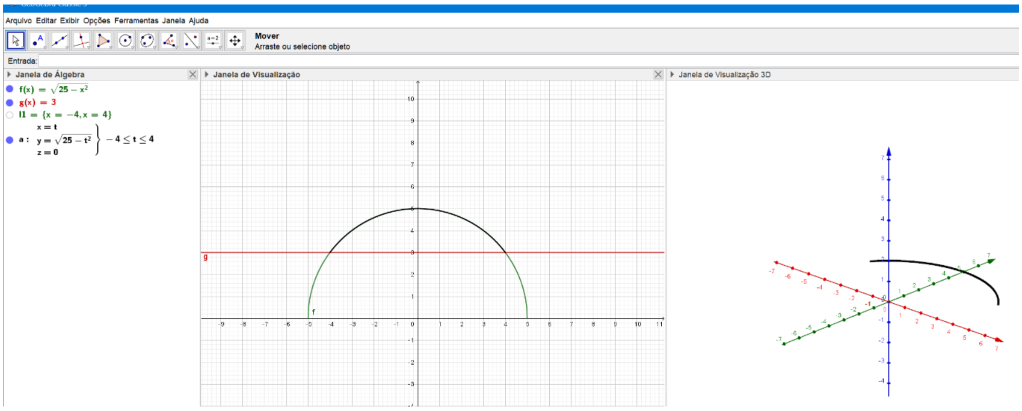


7. Vamos agora parametrizar as curvas, usando o comando “*Curva*”, digitando no campo “*Entrada*”:

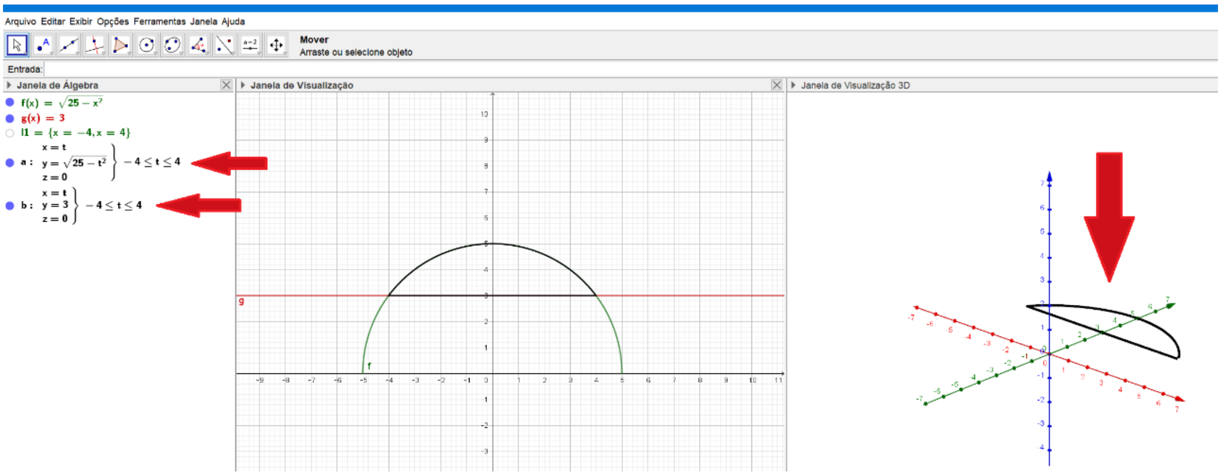
“$\boldsymbol{Curva(t, f(t), 0, t, -4, 4)}$” .



Pressionando <Enter>, obteremos, graficamente:

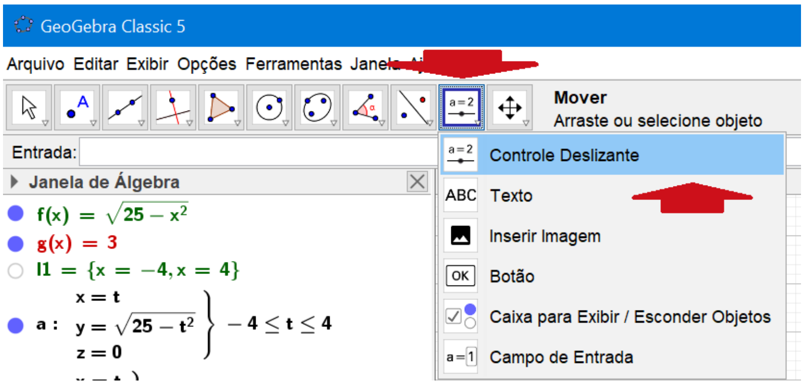


8. Voltando ao campo "*Entrada*", digitamos: "$\boldsymbol{Curva(t, g(t), 0, t, -4, 4)}$". Pressionado <Enter>, obteremos:

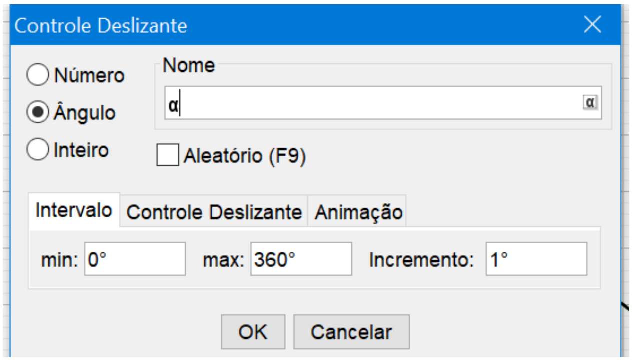


Note que ambas as funções, $\boldsymbol{f(x)}$ e $\boldsymbol{g(x)}$, ficaram definidas na janela 3D no domínio que nos interessa, ou seja, entre $\boldsymbol{x = -4}$ e $\boldsymbol{x = 4}$ e, o mais importante, a janela 3D mostra somente a região $\boldsymbol{R}$ na qual estamos interessados. Esta rotacionada, irá gerar a superfície de revolução, formando o sólido de revolução cujo volume desejamos calcular.

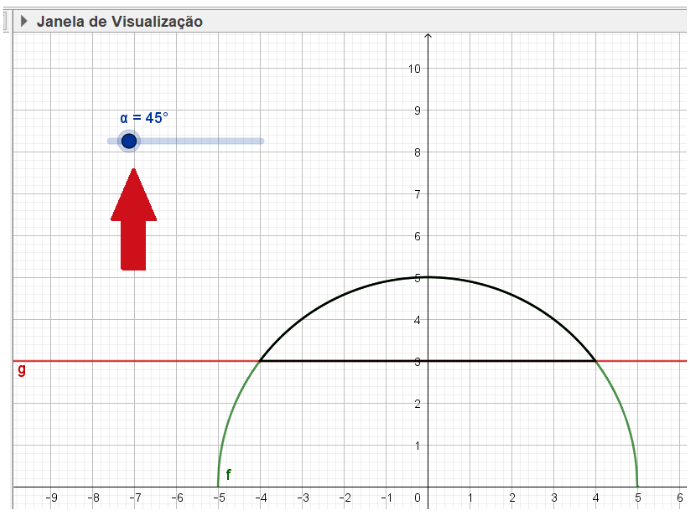
9. Para que o Geogebra possa renderizar o sólido desejado, teremos que criar um "*Controle Deslizante*", clicando no 10º botão de menu da barra de ferramentas, para a criação do comando:



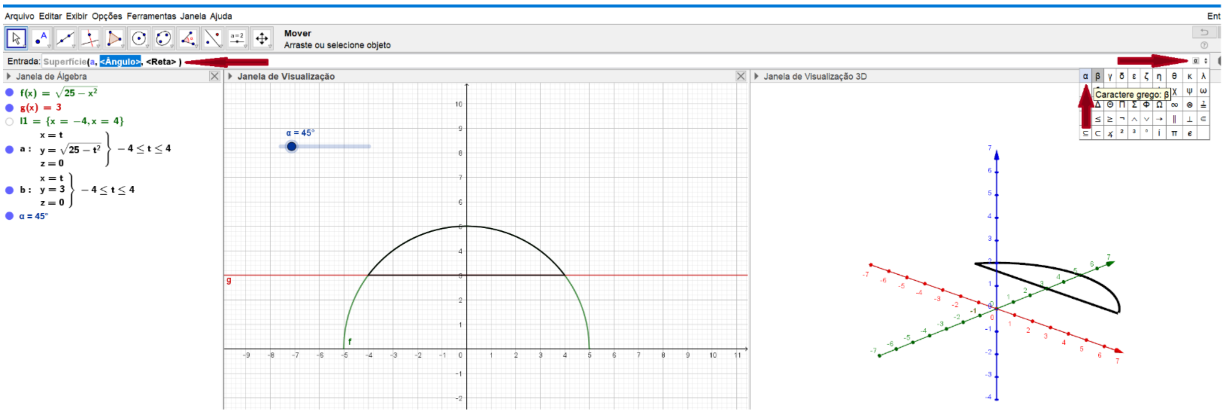
Clicando na área da janela 2D, aparecerá a caixa de diálogo do "*Controle Deslizante*", onde habilitaremos o comando "*Ângulo*" que, uma vez habilitado, atribuirá automaticamente o nome do ângulo como "alfa". Clicamos em "Ok", fechando a janela de diálogo.



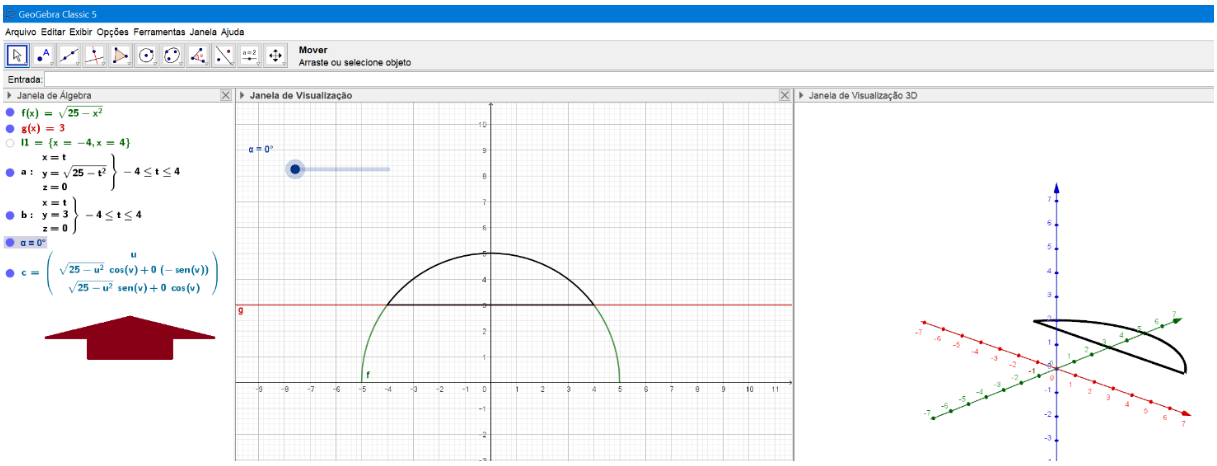
Note que apareceu, na janela 2D, a ferramenta "*Controle Deslizante*", que será útil aos nossos propósitos.



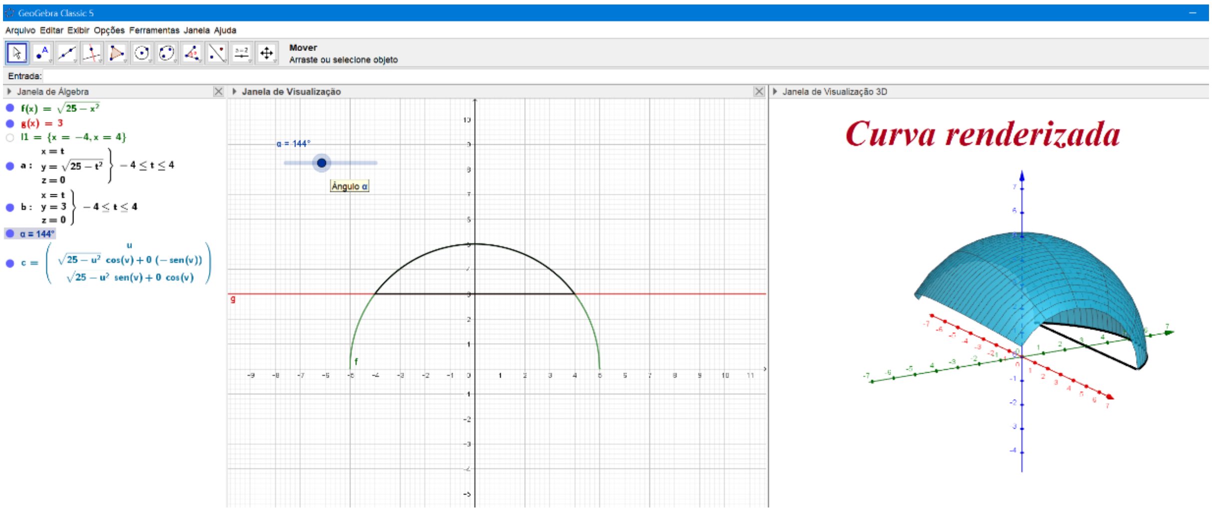
10. No campo de entrada, usando o comando “*Superfície*”, especificamente o comando “***Superfície(<Curva>, <Ângulo>, <Reta>***”, digitamos: ***Superfície(a, α, EixoX)***. É interessante saber que a indicação do ângulo alfa será obtida clicando no ícone “alfa”, à direita na tela, ao final da caixa do comando entrada, como mostra a figura abaixo, escolhendo na caixa de diálogo relativa as letras gregas, o "***α***" . O Geogebra, caso digitemos “alfa” na linha de comando, não entende como sendo a indicação do ângulo que aparece no “*Controle Deslizante*”, não produzindo o efeito desejado.



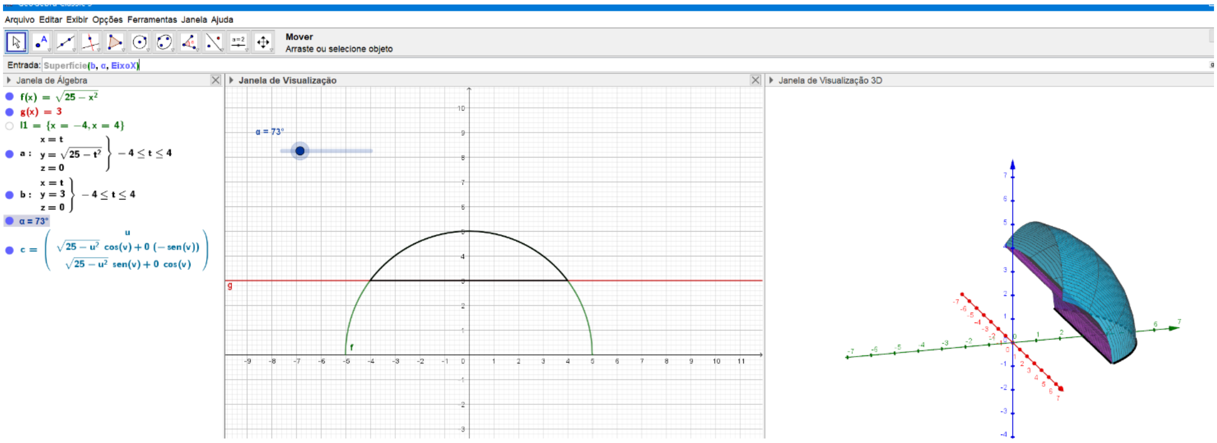
Clicando em <Enter>, aparecerá na janela da álgebra uma sentença matemática, denominada “***c***”, que irá renderizar a superfície da região ***R*** quando rotacionada em torno do eixo *x*.



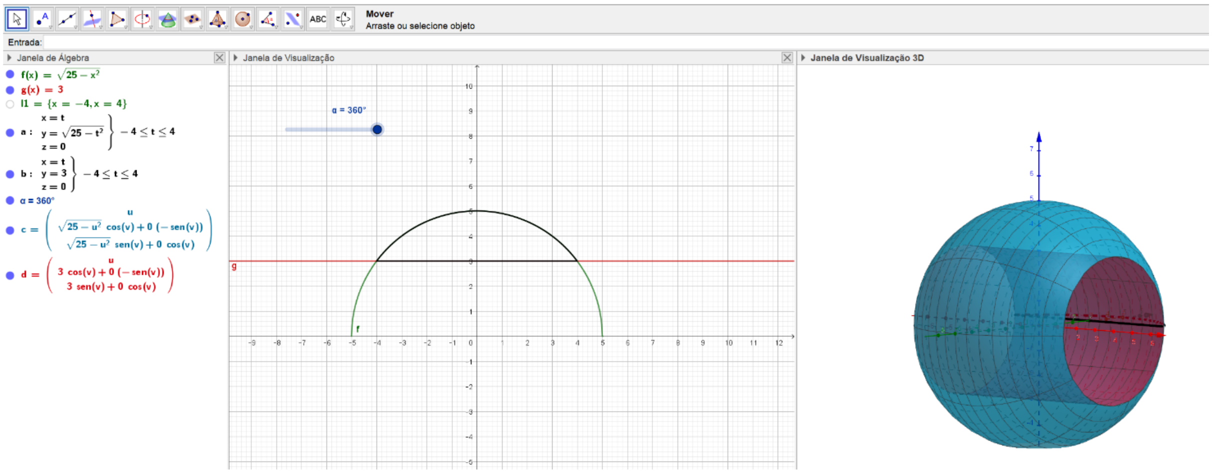
11. Movimentando o controle deslizante da janela 2D, e observando a janela 3D, notamos a renderização da *curva superior* que descreve a superfície em questão, como mostra a figura abaixo:



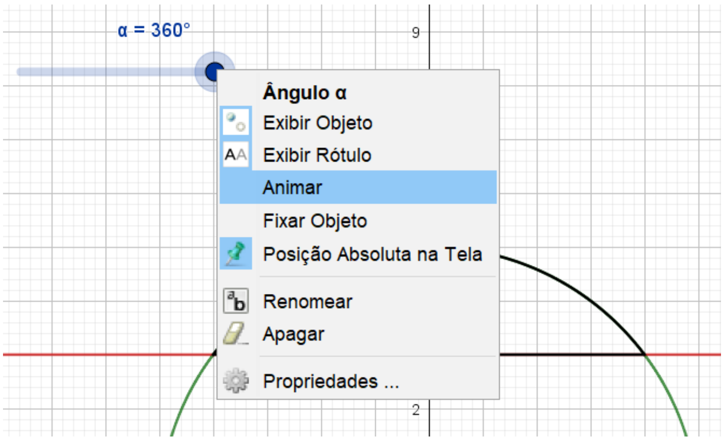
12. Para renderizar a *curva inferior*, entramos no campo de entrada com o comando: ***Superfície(b, α, EixoX)*** para que o Geogebra a renderize, conforme mostra a figura abaixo:



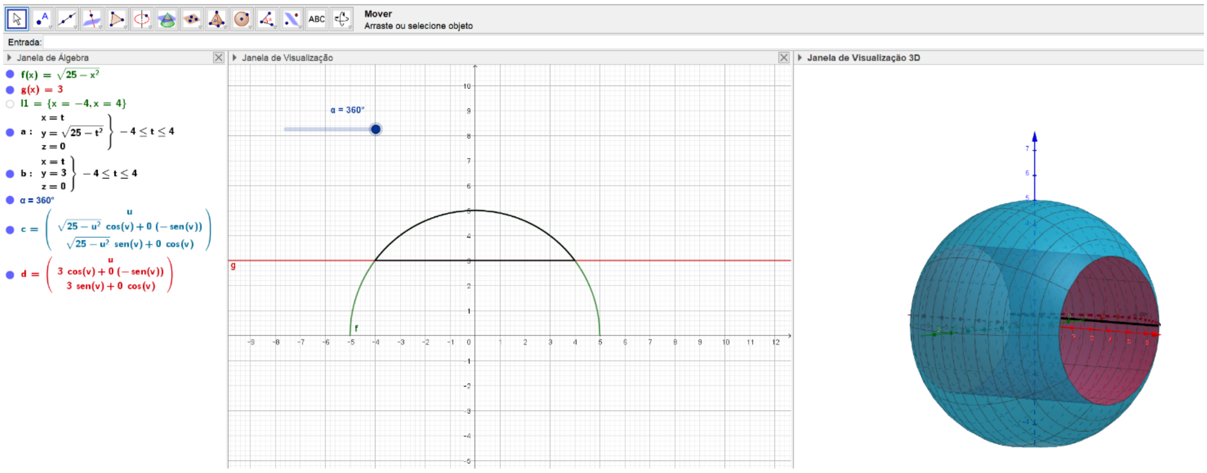
Clicando em <Enter>, aparecerá o sólido gerado, conforme mostra a figura abaixo:



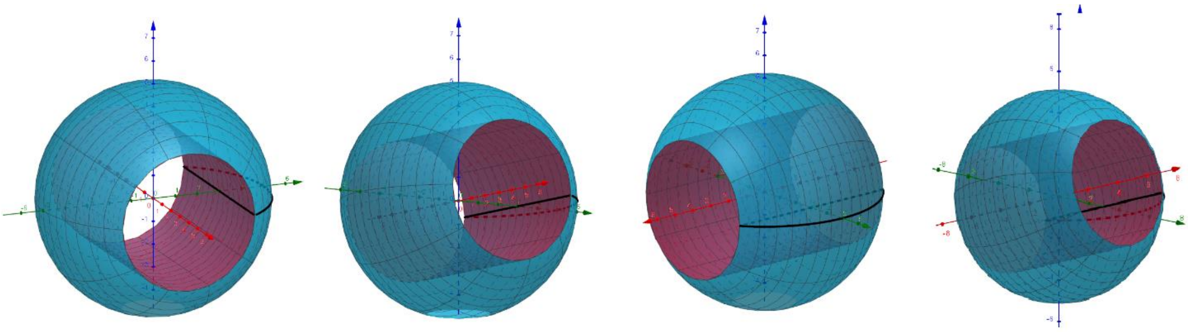
13. Clicando com o botão direito do mouse sobre o controle deslizante, escolhemos, no menu que aparece, o comando “*Animar*”. O Geogebra animará a renderização da região determinada pelas curvas em questão, rotacionando-a 360º em torno do eixo *x*.



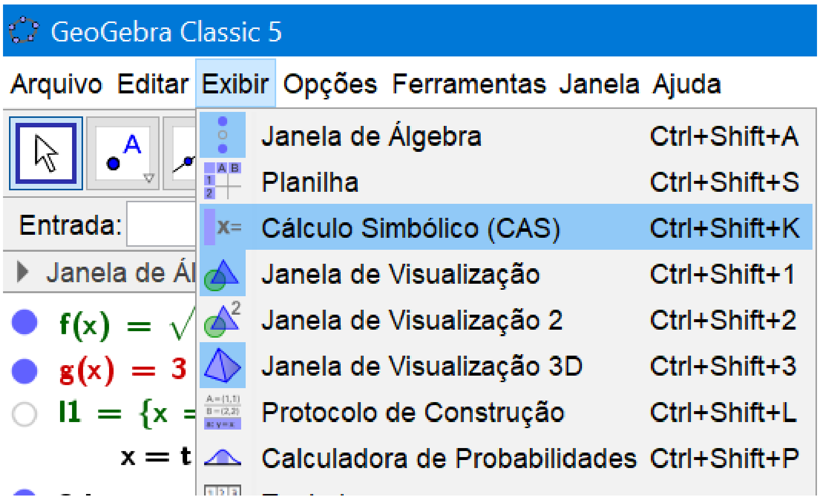
A figura abaixo mostra a superfície do sólido de revolução gerada pela rotação da região ***R***, em tono do eixo *x*, após o comando "Animar" ser aplicado:



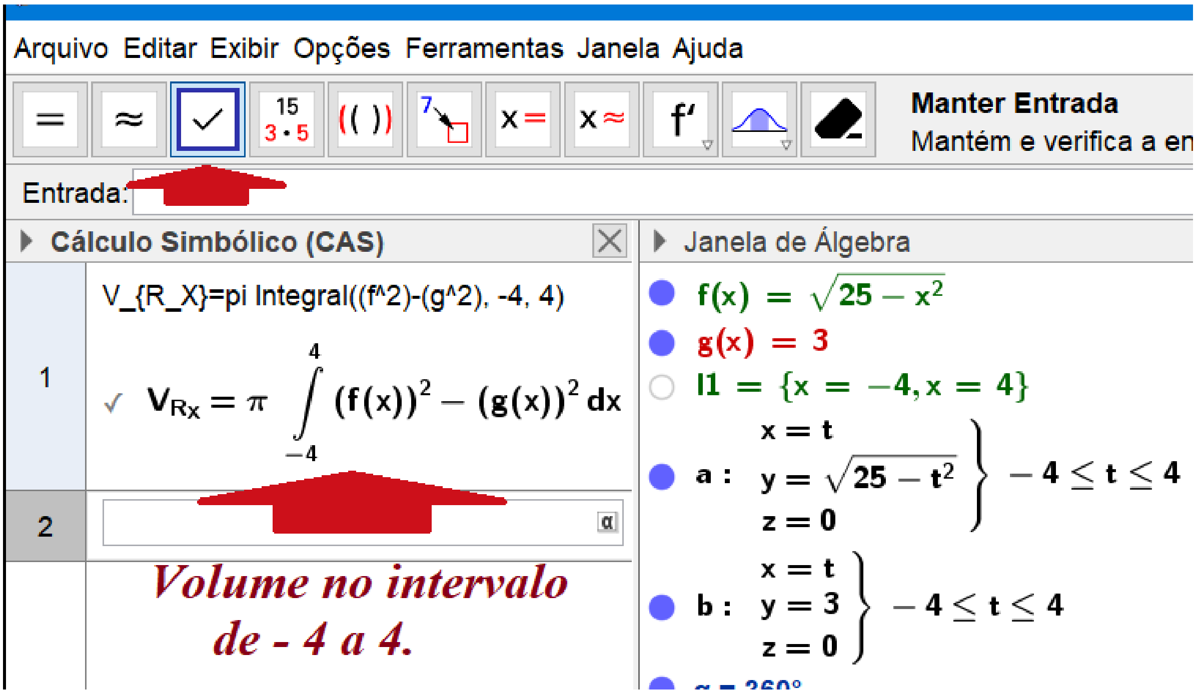
14. Clicando em qualquer ponto da janela 3D e segurando, podemos rotacionar os eixos *x*, *y* e *z*, possibilitando observar o sólido gerado de vários ângulos, conforme mostra a figura abaixo. Experimente...



15. Finalmente, para validarmos os cálculos feitos à mão quando da determinação do volume gerado pela rotação da região ***R*** em torno do eixo *x*, clicamos na barra de menus em "*Exibir*", escolhendo no submenu "*Cálculo Simbólico (CAS)*", que mostrará uma nova janela no Geogebra, nos permitindo efetuar cálculos matemáticos.

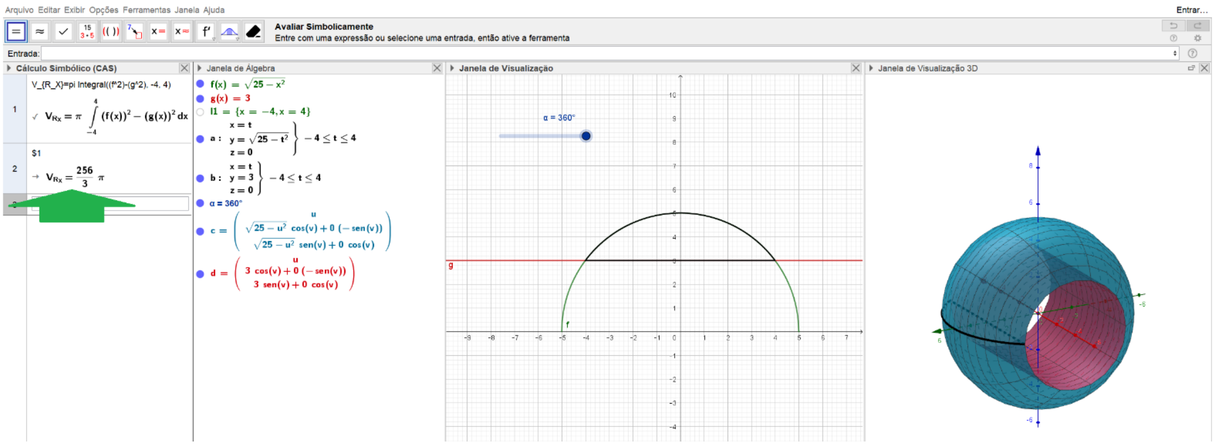


16. Na barra de ferramentas da janela CAS, clicamos no 3º ícone,  ,"*Manter Entrada*", habilitando-o, digitando em seguida, no campo de entrada, o comando: ***V_{R_X}=pi*Integra((f^2) – (g^2), – 4,4)***, que possibilitará o cálculo simbólico do volume desejado. Pressionando <Enter>, o Geogebra mostrará a tela abaixo:

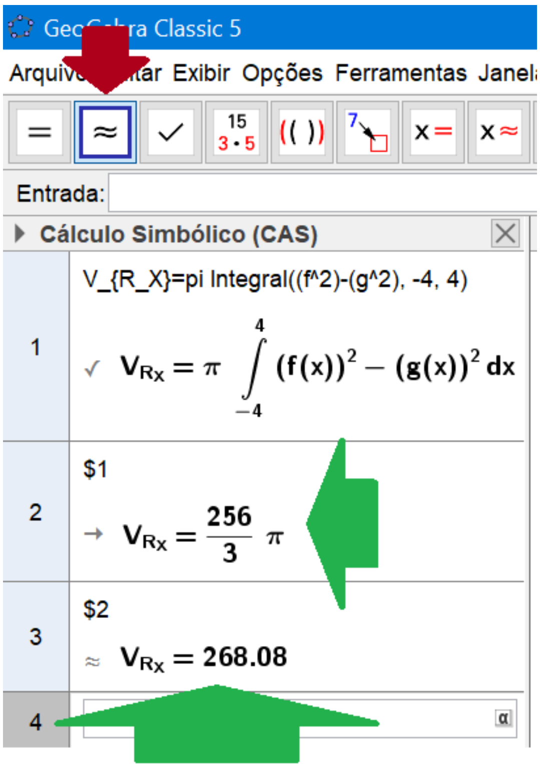


Note que ele fornece a fórmula do volume como a escrevemos manualmente, inclusive indicando os extremos de integração.

17. Para que o Geogebra forneça o cálculo do volume da região, basta clicar no 1º ícone da barra de ferramentas, $\boxed{=}$, "*Avaliar Simbolicamente*", o que nos dará o valor do volume do sólido gerado pela rotação da região ***R***, na forma de fração, conforme mostra a figura abaixo:



18. Clicando no 2º ícone da barra de ferramentas, $\boxed{\approx}$, "*Valor Numérico*", teremos a resposta em decimais.



19. O resultado final do trabalho é mostrado na figura abaixo, onde aparecem as quatro janelas do Geogebra em operação: a **janela CAS**, com os cálculos simbólicos; a **janela da álgebra**, com os comandos dados para o traçado do gráfico; a **janela 2D**, como os gráficos traçados no plano cartesiano; e a **janela 3D**, com os gráficos no espaço tridimensional, mostrando em vermelho o eixo $\boldsymbol{x}$, em verde o eixo $\boldsymbol{y}$ e em azul o eixo $\boldsymbol{z}$.